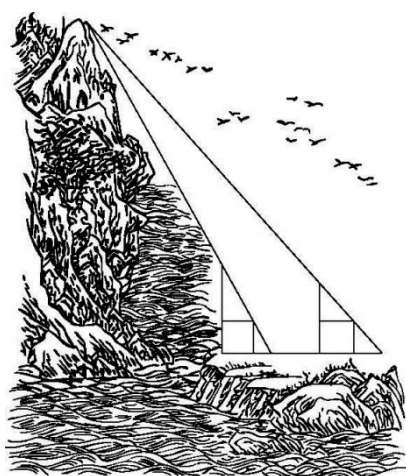


32 中國最早的測量問題…劉徽的海島算經

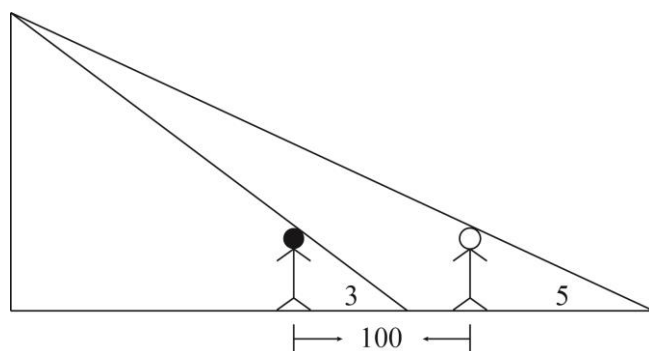
測量與計算是一對孿生兄弟，有了測量數據後，必須借用有效的數學公式，才能經由計算得到更多想要知道的數據。相似三角形的對應邊之邊長成比例與勾股定理是國中生常用的計算公式，而正弦與餘弦定理則是高中生的計算公式。

劉徽的《海島算經》只有九道測量問題被留傳下來，其中的第一題可說是最經典，最常被引用的問題：

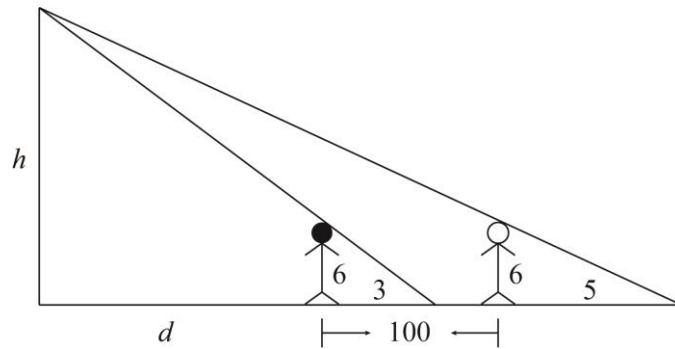


這裡提出《海島算經》的第一題給讀者回味，同時它也是台北縣九十六學年度縣立高中職數學科競賽的口試試題。

夜黑風高的晚上，只有海島頂端的一盞明燈可以照亮大地。有一位 6 尺高的人在海邊測得其影子長 5 尺，當此人向明燈的方向前進 100 尺後，再次測量得到影子長為 3 尺。聰明的你可以算出海島高度嗎？



設海島高度為 h ，此人第二次測量影長所佔地點與海島的距離為 d ，如下圖所示：

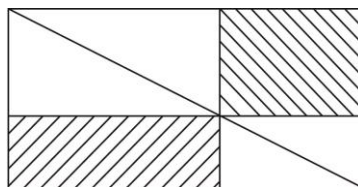


從《海島算經》的測量圖，我們可以理解：當時是以相似三角形的比例關係來求解 h 與 d 。順著上圖所產生的相似三角形比例式

$$\frac{6}{h} = \frac{3}{3+d}, \quad \frac{6}{h} = \frac{5}{5+100+d},$$

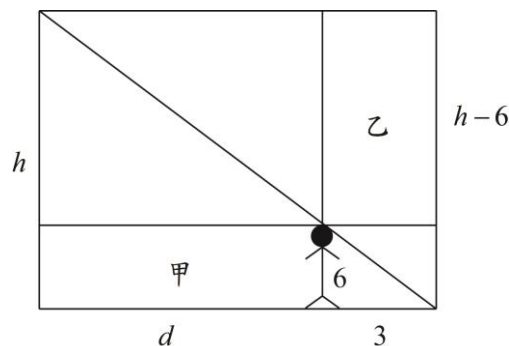
解得 $d = 150, h = 306$ 。

前面我們是以相似三角形邊長成比例的數學公式來算得海島的高度，這裡另外提出一個計算海島高度的數學模型：如下圖所示，在矩形上畫一條對角線，對角線上任取一點，過此點作鉛直與水平線。此時不通過對角線的兩塊小矩形之面積必相等。



這個模型的證明並不難，我們利用此模型來算海島高度。

從第二次測量點得到如下的矩形：



因為甲、乙兩個矩形有相同的面積，所以

$$6 \times d = (h - 6) \times 3.$$

同理，從第一次觀測點可以得到面積相等的方程式為

$$6 \times (d + 100) = (h - 6) \times 5.$$

解聯立方程式組

$$\begin{cases} 6 \times d = (h - 6) \times 3 \\ 6 \times (d + 100) = (h - 6) \times 5 \end{cases}$$

得 $h = 306, d = 150$ 。故海島高度為 306 公尺。